Решения задач на экстремум

1. Найти безусловный экстремум функции

Решение:

Чтобы найти критические точки, вычислим частные производные и приравняем их к нулю:

Из второго уравнения:

Подставляя в первое уравнение:

Следовательно:

Чтобы убедиться, что это минимум, проверим матрицу Гессе:

Поскольку Гессиан является положительно определенным, является локальным и глобальным минимумом.

**Ответ:** Точка является локальным и глобальным минимумом.

2. Проверить, является ли точка безусловным экстремумом функции

Решение:

Сначала убедимся, что является критической точкой:

В точке :

Теперь проверим матрицу Гессе:

Вычисляем главные миноры: - -

Поскольку второй главный минор отрицателен, Гессиан является неопределенным.

**Ответ:** Нет, это не экстремум, так как необходимые условия второго порядка не выполняются.

3. Найти безусловный экстремум функции

Примечание: В оригинале, по-видимому, опечатка. Предполагается

Решение:

Находим критические точки:

Из уравнения 3: Из уравнения 2: Из уравнения 1: может быть любым значением

Матрица Гессе:

Поскольку , Гессиан является вырожденным (не является положительно или отрицательно определенным).

**Ответ:** В точке - локальный минимум; в точке экстремума нет, так как необходимые условия второго порядка не выполняются.

4. Найти безусловный экстремум функции

**Решение:**

Находим критические точки:

Из уравнения 2:

Подставляя в уравнение 1:

Для :

Проверяем Гессиан в точке :

и

**Ответ:** Точка является локальным минимумом; точка не является экстремумом, так как необходимые условия второго порядка не выполняются.

5. Найти условный экстремум

При условии: , где

**Решение:**

Поскольку ограничение выполняется для всех , это фактически задача без ограничений.

Гессиан в точке :

Гессиан является положительно полуопределенным.

**Ответ:** Точка удовлетворяет необходимым условиям условного экстремума второго порядка. Поскольку и для любого : , по теореме Вейерштрасса, является точкой глобального минимума.

6. Найти безусловный экстремум функции

Решение:

Находим критические точки:

Из уравнения 2:

Подставляя в уравнение 1:

Следовательно:

**Ответ:** Точка является локальным минимумом.

7. Проверить, является ли точка безусловным минимумом функции

Решение:

Сначала убедимся, что это критическая точка:

В точке :

В точке :

Значение функции в точке равно .

Поскольку все члены в неотрицательны и равны нулю только в точке , это глобальный минимум.

**Ответ:** Да, является.

8. Найти безусловный экстремум функции

Решение:

Находим критические точки:

Из уравнения 2: , так что или

Если : Все частные производные равны нулю для любых .

Если : Из уравнения 3: Из уравнения 1: (противоречие с уравнением 2)

На самом деле, из уравнения 2: если , то Из уравнения 1: (нет реального решения)

**Ответ:** Точка является локальным максимумом; точка не является экстремумом.